## Лабораторная работа по теме

## «Тема 1.8. Методы многомерной оптимизации»

### **1.8.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи многомерной оптимизации.
2. Классификация задачи оптимизации.
3. Основные понятия: выпуклое множество, целевая функция, линии уровня, поверхности уровня, градиент скалярной функции и его свойства, локальный и глобальный минимум, выпуклая функция, условия существования минимума функции нескольких переменных.
4. Градиентные методы и алгоритмы оптимизации: метод с дроблением шага;метод наискорейшего спуска аналитический; метод наискорейшего спуска численный.
5. Основные свойства градиентных методов оптимизации, различия методов.
6. Начальная точка траектории поиска минимума, свойства траектории, условия окончания процесса оптимизации.

### **1.8.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 1.8-1 для решения задачи оптимизации функции нескольких переменных:

* функцию–f(x, y);
* метод оптимизации для «ручного расчета» – определяется значением параметра p;
* метод оптимизации для «расчета на ПК»– значения параметровt и r**.**

1. **Проверить условия существования точки минимума** заданной функции f(x).
2. **Решить задачу многомерной оптимизациианалитическим методом**.
3. **Выбрать начальную точку**x0, y0итерационного процесса оптимизации.
4. **Решить задачу оптимизации« ручным расчетом»** (3 итерации)выбранным методом.
5. **Вычислить погрешности**



1. **Составить схему алгоритма, программу** решения задачи оптимизации и провести контрольное тестирование.
2. **Решить задачу многомерной оптимизации «расчетом на ПК»**при точности определения минимума E=0.1, 0.05, 0.01, 0.001.
3. **Построить траекторию поиска минимума** по результатам«расчетана ПК» и изобразить схематически линии уровня, проходящие через точки траектории. На графике указать точку минимума, найденную в п.3 задания.

### **1.8.3. Варианты задания**

Таблица 1.8-1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Функция** | **р** | **t** | **r** |
| 1 | 2 x2 + 3 y2 – 5 x + 6 | 1 | 3 |  |
| 2 | x2 + 2 y2 – 3 y + 7 | 3 | 1 |  |
| 3 | 3 x2 + y2 – 15 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 3 x2 + 5 y2 + x – 2 | 3 | 1 |  |
| 5 | 2 x2 + 3 y2 + 2 x – 3 y | 1 | 2 | 2 |
| 6 | 5 x2 + 2 y2 + 3 x + 10 | 3 | 1 |  |
| 7 | 4 x2 + 3 y2 – 3 y – 7 | 1 | 2 | 1 |
| 8 | 5 x2 + 6 y2 + 3 x – 2 y + 3 | 3 | 1 |  |
| 9 | 3 x2 + y2 + - 3 x + y – 2 | 1 | 2 | 2 |
| 10 | 6 x2 + 5 y2 – 10 | 3 | 3 |  |
| 11 | 5 x2 + 2 y2 – 2 x | 1 | 2 | 1 |
| 12 | x2 + 2 y2 – 3 x + 5 y + 1 | 3 | 1 |  |
| 13 | x2 + 4 y2 – 2 x | 1 | 2 | 2 |
| 14 | 4 x2 + 3 y2 + y + 3 | 3 | 1 |  |
| 15 | 3 x2 + y2 + 3 | 1 | 3 |  |
| 16 | 6 x2 + 4 y2 – 5 x + 3 y –13 | 3 | 1 |  |
| 17 | 5 x2 + y2 + x | 1 | 2 | 1 |
| 18 | x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y + 5 | 1 | 3 |  |
| 19 | 2 x2 + 5 y2 + 2 y + 3 | 3 | 1 |  |
| 20 | x2 + 3 y2 – x + 2 y + 7 | 1 | 2 | 2 |
| 21 | 3 x2 + y2 – y + 3 | 1 | 3 |  |
| 22 | 6 x2 + 3 y2 + 10 | 3 | 1 |  |
| 23 | 5 x2 + 4 y2 – 4 x – 11 | 1 | 2 | 1 |
| 24 | x2 + 2 y2 – x – y | 3 | 1 |  |
| 25 | 3 x2 + 2 y2 – 5 y + 1 | 1 | 2 | 2 |
| 26 | 3 x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y – 5 | 1 | 2 | 1 |
| 27 | 4 x2 + 5 y2 + 2 x – 4 y + 12 | 3 | 1 |  |
| 28 | 6 x2 + 3 y2 – 4 x + 17 | 1 | 2 | 1 |
| 29 | x2 + 5 y2 – x + 2 y + 10 | 3 | 1 |  |
| 30 | 3 x2 + y2 – 10 | 1 | 3 |  |

В табл. 1.8-1**р, t** – номер метода решения задачи оптимизации: **1** – ГДШ; **2** – НСЧ;   
 **3** – НСА, а **r** – номер метода, используемого в подпрограмме при использовании метода

НСЧ: **1** – метод дихотомии; **2**– метод золотого сечения.

### **1.8.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты проверки условия существования точки минимума.
3. Аналитическое решение задачи оптимизации.
4. Начальная точкачисленного процесса оптимизации.
5. Результаты«ручного расчета» задачи оптимизации выбранными методами (3 итерации), представленные в табл. 1.8-2.

Таблица 1.8-2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |

1. Значения погрешностей выбранных методов после   
   трех итераций.



1. Схемы алгоритмови программы используемых численных методов оптимизации и результаты контрольного тестированияпри точности вычисления минимума E = 0.1; 0.05; 0.01; 0.001.
2. Результаты решения задачи многомерной оптимизации «расчетом на ПК», представленные в табл. 1.8-3.

Таблица 1.8-3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **E** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 1 | 0.1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.05 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.01 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.001 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Траектория поиска минимума.
2. Результаты выполнения задания, полученные с помощью математических пакетов.

### **1.8.5. Пример выполнения задания**

1. **Задание для решения задачи многомерной оптимизации:**

* функция – ;



* метод оптимизации для «ручного расчета» - значение параметра **p=3**;
* метод оптимизации для расчета на ПК – значение параметра t=1.

1. **Проверка существования минимума функции**

Из [2] известно, что всякий глобальный минимум выпуклой функции является одновременно и локальным.

Проверить, что функция является выпуклой на множестве R.



Матрица Гессе для функции :



,



а угловые миноры:

.



Таким образом, функция - выпуклая на множестве R**.**



1. **Решение задачи многомерной оптимизации аналитическим методом**

Необходимые условия существования точки экстремума:

откуда.



1. **Начальная точкаитерационного процесса численного решения задачи многомерной оптимизации**

Выбрать начальную точку - .



1. **Решение задачи численной оптимизации методами наискорейшего спуска, градиентного спуска с дроблением шага «ручным расчетом»**

Из 1.8.3-3 в [2]имеем:

где



Построим функцию

,



Из условия определим параметр :



, k=0, 1,…



Произведем вычисления, а результаты представим в табл. 1.8-2:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0.5 | 0.2097 | 2 | 3 | 27.75 |
| 2 | 0.5806 | -0.1290 | 0.3095 | 1.1613 | -0.7742 | 21.3871 |
| 3 | 0.2212 | +0.1105 | 0.2097 | 0.4424 | 0.66359 | 21.0857 |
| 4 | 0.1284 | -0.0285 | 0.3095 | 0.2569 | -0.171 | 21.0189 |

Xmin=0.1284, ymin=-0.0285, f=21.0189**.**

1. **Погрешности после трех итераций**

Вычислить погрешности после трех итераций:



1. **Схема алгоритма, программа и результаты контрольного тестирования**

Схемы алгоритмовоптимизации методами НСА и ГДШ приведены на рис. 1.8.4-2 и   
рис. 1.8.3-2 в [2]. Программы студенты должны составить самостоятельно.

1. **Решение задачи оптимизации на ПК**

Получить решение на ПК по составленным программам с точностью Е=0.1; 0.05; 0.01; 0.001.

Результаты решения задачи оптимизации градиентным методом с дроблением шага (ГДШ) при точности вычисления минимума E=0.1; 0.05; 0.01; 0.001представлены в   
табл. 1.8-3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **E** | **X** | **y** |  |  |  |  |
| **1** | **0.1** | **1.0000** | **0.5000** | **27.75** | **0.0000** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.2000** | **-0.7000** | **27.5100** | **0.4000** | **0.4000** | **-4.2000** |
| **3** | **0.1200** | **0.1400** | **21.0732** | **0.2000** | **0.2400** | **0.8400** |
| **4** | **0.0720** | **-0.0280** | **21.0075** | **0.2000** | **0.1440** | **-0.1680** |
| **5** | **0.0144** | **0.0392** | **21.0048** | **0.4000** | **0.0288** | **0.2352** |
|  | **0.0086** | **-0.0078** | **21.000** |  |  |  |
| **1** | **0.05** | **1.0000** | **0.5000** | **27.75** | **0.0000** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.2000** | **-0.7000** | **27.5100** | **0.4000** | **0.4000** | **-4.2000** |
| **3** | **0.1200** | **0.1400** | **21.0732** | **0.2000** | **0.2400** | **0.8400** |
| **4** | **0.0720** | **-0.0280** | **21.0075** | **0.2000** | **0.1440** | **-0.1680** |
| **5** | **0.0144** | **0.0392** | **21.0048** | **0.4000** | **0.0288** | **0.2352** |
|  | **0.0086** | **-0.0078** | **21.000** |  |  |  |
| **1** | **0.01** | **1.0000** | **0.5000** | **27.75** | **0.0000** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.2000** | **-0.7000** | **27.5100** | **0.4000** | **0.4000** | **-4.2000** |
| **3** | **0.1200** | **0.1400** | **21.0732** | **0.2000** | **0.2400** | **0.8400** |
| **4** | **0.0720** | **-0.0280** | **21.0075** | **0.2000** | **0.1440** | **-0.1680** |
| **5** | **0.0144** | **0.0392** | **21.0048** | **0.4000** | **0.0288** | **0.2352** |
| **6** | **0.0086** | **-0.0078** | **21.0002** | **0.2000** | **0.0172** | **-0.0470** |
| **7** | **0.0051** | **0.0015** | **21.0000** | **0.2000** | **0.0103** | **0.0094** |
| **8** | **0.0010** | **-0.0021** | **21.0000** | **0.4000** | **0.0020** | **-0.0131** |
|  | **0.0006** | **0.0004** | **21.0000** |  |  |  |
| **1** | **0.001** | **1.0000** | **0.5000** | **27.75** | **0.0000** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.2000** | **-0.7000** | **27.5100** | **0.4000** | **0.4000** | **-4.2000** |
| **3** | **0.1200** | **0.1400** | **21.0732** | **0.2000** | **0.2400** | **0.8400** |
| **4** | **0.0720** | **-0.0280** | **21.0075** | **0.2000** | **0.1440** | **-0.1680** |
| **5** | **0.0144** | **0.0392** | **21.0048** | **0.4000** | **0.0288** | **0.2352** |
| **6** | **0.0086** | **-0.0078** | **21.0002** | **0.2000** | **0.0172** | **-0.0470** |
| **7** | **0.0051** | **0.0015** | **21.0000** | **0.2000** | **0.0103** | **0.0094** |
| **8** | **0.0010** | **-0.0021** | **21.0000** | **0.4000** | **0.0020** | **-0.0131** |
| **9** | **0.0006** | **0.0004** | **21.0000** | **0.2000** | **0.0012** | **0.0026** |
|  | **0.0003** | **-0.0000** | **21.0000** |  |  |  |

Результаты решения задачи оптимизации градиентным методом наискорейшего спуска (НСА) свести в табл. 1.8-3:

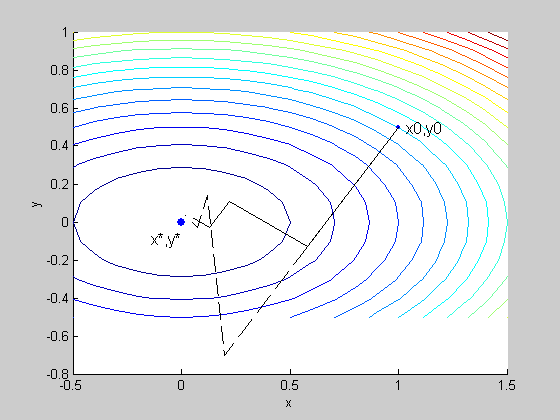
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **E** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| **1** | **0.1** | **1.0000** | **0.5000** | **0.0000** | **0.2096** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.5806** | **-0.1290** | **21.3870** | **0.3095** | **1.1612** | **-0.7741** |
| **3** | **0.2211** | **0.1105** | **21.0856** | **0.2096** | **0.4423** | **0.6635** |
| **4** | **0.1284** | **-0.0285** | **21.0189** | **0.3095** | **0.2568** | **-0.1712** |
| **5** | **0.0489** | **0.0244** | **21.0041** | **0.2096** | **0.0978** | **0.1467** |
|  | **0.0284** | **-0.0063** | **21.0009** |  |  |  |
| **1** | **0.05** | **1.0000** | **0.5000** | **0.0000** | **0.2096** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.5806** | **-0.1290** | **21.3870** | **0.3095** | **1.1612** | **-0.7741** |
| **3** | **0.2211** | **0.1105** | **21.0856** | **0.2096** | **0.4423** | **0.6635** |
| **4** | **0.1284** | **-0.0285** | **21.0189** | **0.3095** | **0.2568** | **-0.1712** |
| **5** | **0.0489** | **0.0244** | **21.0041** | **0.2096** | **0.0978** | **0.1467** |
| **6** | **0.0284** | **-0.0063** | **21.0009** | **0.3095** | **0.0568** | **-0.0378** |
|  | **0.0108** | **0.0054** | **21.0002** |  |  |  |
| **1** | **0.01** | **1.0000** | **0.5000** | **0.0000** | **0.2096** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.5806** | **-0.1290** | **21.3870** | **0.3095** | **1.1612** | **-0.7741** |
| **3** | **0.2211** | **0.1105** | **21.0856** | **0.2096** | **0.4423** | **0.6635** |
| **4** | **0.1284** | **-0.0285** | **21.0189** | **0.3095** | **0.2568** | **-0.1712** |
| **5** | **0.0489** | **0.0244** | **21.0041** | **0.2096** | **0.0978** | **0.1467** |
| **6** | **0.0284** | **-0.0063** | **21.0009** | **0.3095** | **0.0568** | **-0.0378** |
| **7** | **0.0108** | **0.0054** | **21.0002** | **0.2096** | **0.0216** | **0.0324** |
| **8** | **0.0062** | **-0.0013** | **21.0000** | **0.3095** | **0.0125** | **-0.0083** |
|  | **0.0023** | **0.0011** | **21.0000** |  |  |  |
| **1** | **0.001** | **1.0000** | **0.5000** | **0.0000** | **0.2096** | **2.0000** | **3.0000** |
| **2** | **0.5806** | **-0.1290** | **21.3870** | **0.3095** | **1.1612** | **-0.7741** |
| **3** | **0.2211** | **0.1105** | **21.0856** | **0.2096** | **0.4423** | **0.6635** |
| **4** | **0.1284** | **-0.0285** | **21.0189** | **0.3095** | **0.2568** | **-0.1712** |
| **5** | **0.0489** | **0.0244** | **21.0041** | **0.2096** | **0.0978** | **0.1467** |
| **6** | **0.0284** | **-0.0063** | **21.0009** | **0.3095** | **0.0568** | **-0.0378** |
| **7** | **0.0108** | **0.0054** | **21.0002** | **0.2096** | **0.0216** | **0.0324** |
| **8** | **0.0062** | **-0.0013** | **21.0000** | **0.3095** | **0.0125** | **-0.0083** |
| **9** | **0.0023** | **0.0011** | **21.0000** | **0.2096** | **0.0047** | **0.0071** |
| **10** | **0.0013** | **-0.0003** | **21.0000** | **0.3095** | **0.0027** | **-0.0018** |
| **11** | **0.0005** | **0.0002** | **21.0000** | **0.2096** | **0.0010** | **0.0015** |
|  |  | **0.0003** | **-0.0000** | **21.0000** |  |  |  |

Координаты точки минимума и значения функции, вычисленные с точностью **Е**:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Метод** | **E** | **k** | **x** | **y** | **f(x,y)** |
| **ГДШ** | **0.1** | **5** | **0.008640** | **-0.007840** | **21.000260** |
| **0.05** | **5** | **0.008640** | **-0.007840** | **21.000260** |
| **0.01** | **8** | **0.000622** | **0.000439** | **21.000000** |
| **0.001** | **9** | **0.000373** | **-0.000087** | **21.000000** |
| **НСА** | **0.1** | **5** | **0.028411** | **-0.006313** | **21.000930** |
| **0.05** | **6** | **0.010823** | **0.005412** | **21.000200** |
| **0.01** | **8** | **0.002394** | **0.001197** | **21.000010** |
| **0.001** | **11** | **0.000308** | **-0.000068** | **21.000000** |

1. **Траектория поиска минимума.**

Построим траекторию поиска минимума:



### **1.8.6. Контрольные вопросы по теме**

### **Многомерная оптимизация**

1. На какие задачи делится задача оптимизации в зависимости от количества

параметров целевой функции?

1. Какая функция называется целевой функцией?
2. Как называется задача оптимизации, если на значения параметров оптимизации существуют ограничения?
3. Что такое градиент?
4. Куда направлен антиградиент?
5. Чему равен модуль антиградиента в точке минимума?
6. Что такое линия уровня?
7. Что такое траектория спуска?
8. Что является условием окончания итерационного процесса по отысканию точки минимума в методах спуска?
9. Что является условием существования минимума для функции от двух переменных?
10. Как выбирается начальная точка при решении задачи многомерной оптимизации?
11. Для минимизации каких функций применяются методы спуска?
12. С каким направлением в градиентных методах совпадает движение к точке минимума?
13. Что является достаточным условием существования минимума функции нескольких переменных?
14. Какая точка называется точкой стационарности ?



1. Что показывает модуль градиента?
2. Во сколько раз уменьшается шаг на каждой итерации в градиентном методе с дроблением шага (ГДШ)?
3. Исходя из каких условий выбирается шаг на каждой итерации в методе наискорейшего спуска (НС)?
4. Какое значение в методе ГДШ принимается за начальное значение шага ?



1. Из какого условия выбирается величина шага спуска в аналитическом методе наискорейшего спуска?
2. Как осуществляется поиск очередной точки траектории спуска в методе наискорейшего спуска?
3. Что нужно сделать, чтобы повысить точность определения точки минимума в методах многомерной оптимизации?
4. Что нужно сделать, чтобы с использованием метода наискорейшего спуска найти максимум функции f(x1, x2)?
5. Какой метод позволяет избежать «овражного» эффекта?
6. Для чего используется метод одномерной оптимизации в численном методе наискорейшего спуска (НСЧ)?
7. Как называется множество точек, для которых целевая функция принимает постоянное значение?



1. Как называется вектор первых частных производных целевой функции?
2. Относится ли к методам многомерной оптимизации правило Рунге?
3. В методах многомерной оптимизации существует ли группа методов, в которых точка минимума (максимума) функции находится путем вложенных отрезков?
4. Относится ли к методам многомерной оптимизации метод наискорейшего спуска?